



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Aufnahmeprüfung Mathematik

## Übungsaufgaben zu den Kurzfragen

Januar 2021

---

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- Keine ausser Stift und Papier

## Grundlagen Algebra

1. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich:

(a)  $\frac{2a+4}{a^2+4a+4}$ .

(b)  $\frac{(a^2-16)^8}{(a-4)^8}$ .

(c)  $\frac{4a^2-36}{a^2-a-12}$ .

2. Berechnen und vereinfachen Sie das Resultat so weit wie möglich:

(a)  $\frac{9x^2+6x+1}{6x+2}$ .

(b)  $\frac{2x}{x-3} - \frac{2x^2}{x^2-4x+3}$ .

(c)  $\frac{x-1}{x-8} + \frac{x+2}{2x+6} - \frac{x+3}{x^2-5x-24}$ .

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$  folgender Gleichungen:

(a)  $x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9} = 0$ .

(b)  $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$ .

(c)  $x^2 - 12x + 18 = 0$ .

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$  folgender Gleichungen:

(a)  $12x^4 - 81x^2 = 21$ .

(b)  $3x - 5\sqrt{x} - 8 = 0$ .

(c)  $\left(\frac{x-5}{4}\right)^2 - 6 = \left(\frac{x-5}{4}\right)$ .

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$  folgender Gleichungen:

(a)  $x^3 - 3x^2 - 28x = 0$ .

(b)  $(x^3 - 5x^2 - 24x)(x^4 - 16) = 0$ .

(c)  $(x-3)^3 = x(x-3)^2(x+5)$ .

**Übungsaufgaben zu den Kurzfragen**

---

**Rechnen mit komplexen Zahlen**

**1.** Es sei  $z \in \mathbb{C}$ . Berechnen Sie die Normalform  $z = a + bi$  für:

(a)  $z = \frac{2-i}{i}$ .

(b)  $z = (2 + 3i)(3 - 5i)$ .

(c)  $z = \frac{4-5i}{4+5i}$ .

(d)  $z = (2 - i)^4$ .

**2.** Es sei  $z \in \mathbb{C}$ . Berechnen Sie den Imaginärteil  $\text{Im}(z)$  für:

(a)  $z = \frac{1}{1+i}$ .

(b)  $z = \frac{3+2i}{1+i}$ .

**3.** Es sei  $z \in \mathbb{C}$ . Berechnen Sie die Polarform  $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$  für:

(a)  $z = \sqrt{3} + i$ .

(b)  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(c)  $z = (1 - i)^6$ .

## Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. *Single Choice:* Berechnen Sie  $x$  und kreuzen Sie an.

$$8^x = 16, x = ?$$

- $\frac{2}{3}$ .
- $\frac{3}{4}$ .
- $\frac{4}{3}$ .
- $\frac{3}{2}$ .
- anderes.

2. *Single Choice:* Berechnen Sie  $x$  und kreuzen Sie an.

$$\frac{27^{0.2}}{9^{0.25}} = 3^x, x = ?$$

- 0.1.
- 0.05.
- 0.05.
- 1.
- anderes.

3. *Single Choice:* Berechnen Sie  $x$  und kreuzen Sie an.

$$\frac{b^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} = b^x, x = ?$$

- 1.
- $\frac{1}{2}$ .
- $-\frac{1}{2}$ .
- 1.
- anderes.

Übungsaufgaben zu den Kurzfragen

---

4. *Single Choice*: Berechnen Sie und kreuzen Sie an.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}} = ?$$

- $\sqrt{2}$ .
- $\sqrt[3]{2}$ .
- $\sqrt[7]{2}$ .
- $\sqrt[12]{2}$ .
- anderes.

5. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen.

Ein Resultat der Form  $\frac{\log(a)}{\log(b)}$  ist in Ordnung.

- (a)  $2^{3x+1} = 6^{x-1}$ .
- (b)  $5^x \cdot 3^{2x} = 1000$ .
- (c)  $3^{x-2} = 4 \cdot 5^{1-3x}$ .
- (d)  $6 \cdot 2^{x-5} = 5 \cdot 6^{x+2}$ .
- (e)  $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$ .

6. Berechnen Sie:

- (a)  $\log_2 \left( \frac{1}{2048} \right)$ .
- (b)  $\log_2 (32^{2.5})$ .
- (c)  $\log_a \left( \frac{1}{\sqrt{a^3}} \right)$ .
- (d)  $4^{3 \log_4(6)}$ .
- (e)  $\log_{10} \left( \log_{10} \left( 10^{\sqrt{1000}} \right) \right)$ .

7. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen:

- (a)  $\ln \left( a^{\frac{1}{4}} \right) + \ln \left( a^{\frac{3}{2}} \right) - \ln (\sqrt{a})$ .
- (b)  $2 \log_a(8) - \log_a(4) + 4 \log_a(3)$ .

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$  folgender Gleichungen:

(a)  $\ln(x^2) - \ln(x - 3) = 8 \ln(2) - \ln(16)$ .

(b)  $\ln(x)^3 - 5 \ln(x)^2 - 24 \ln(x) = 0$ .

(c)  $\lg(9x + 5) - \lg(x) = 1$ .

9. *Single Choice*: Berechnen Sie und kreuzen Sie an.

$$\ln \frac{1}{4} = ?$$

$-2 \ln(2)$ .

$-\frac{1}{2} \ln(2)$ .

$\frac{1}{2} \ln(2)$ .

$2 \ln(2)$ .

anderes.

10. *Single Choice*: Berechnen Sie und kreuzen Sie an.

$$\frac{1}{2} \ln(a) - 2 \ln(b) = ?$$

$\ln\left(\frac{\frac{1}{2}a}{2b}\right)$ .

$\ln\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$ .

$\ln\left(\frac{1}{2}a - 2b\right)$ .

$\ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b^2}\right)$ .

$\ln(\sqrt{ab^2})$ .

11. *Single Choice*: Berechnen Sie und kreuzen Sie an.

$$\ln(x^3 + x^3) = ?$$

$2 \ln(x^3)$ .

$\ln(6) + \ln(x)$ .

$6 \ln(x)$ .

$\ln(2) + 3 \ln(x)$ .

anderes.

## Übungsaufgaben zu den Kurzfragen

### Analysis

1. Bestimmen Sie die Ableitung  $f'(x)$  folgender Funktionen:

(a)  $f(x) = \frac{2}{5x} + 2\sqrt[3]{x}$ .

(b)  $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 2}$ .

(c)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x^3}{x^2 - 2}$ .

(d)  $f(x) = -\cos(x) \sin(x)$ .

(e)  $f(x) = 2 \cos^2(x) + \frac{x}{\cos(x)}$ .

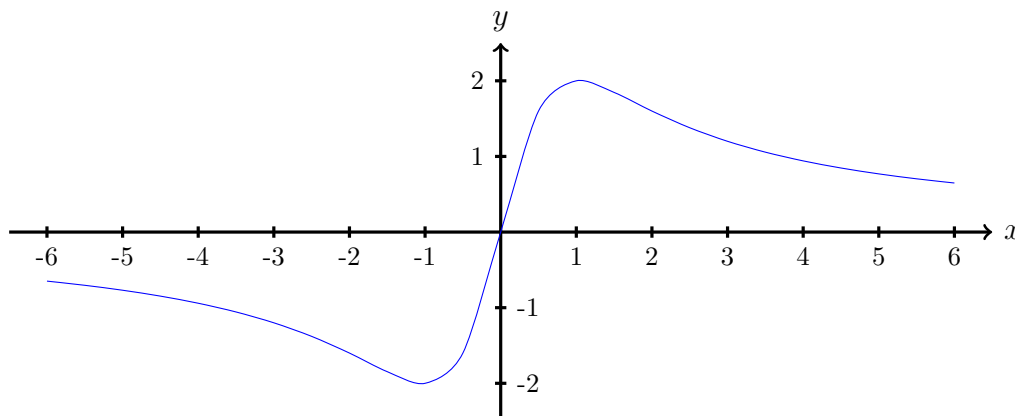
(f)  $f(x) = \frac{1}{a} \cos(\sqrt{ax})$ .

(g)  $f(x) = -2xe^{\frac{1}{x}}$ .

(h)  $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 7)$ .

(i)  $f(x) = \frac{2}{x} \sqrt{x^2 + 1}$ .

2. *Single Choice*: Der Graph



gehört zur Funktion, definiert durch:

$y = \frac{2x}{x^2 - 1}$ .

$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ .

$y = \frac{10x^2}{x^2 + 1}$ .

$y = \frac{2x+2}{x^2+1}$ .

3. Parabeln und Flächeninhalt. Die Punkte  $P(4|?)$  und  $Q(-2|?)$  liegen auf der Parabel  $f(x) = y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ . Die Sekante durch  $P$  und  $Q$  schneidet ein Parabelsegment ab. Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  des entstehenden Parabelsegments.

### Grundlagen der Vektorgeometrie

1. Überprüfen Sie rechnerisch: Liegen die Punkte  $A(3|8|9)$  und  $B(1|-10|-8)$  auf der Geraden durch  $C(5|2|3)$  und  $D(4|5|6)$ ?

2. Für welchen Wert von  $u$  stehen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal zueinander?

(a) Für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ u \end{pmatrix}.$$

(b) Für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ -1 \\ u-7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} u+2 \\ 9 \\ u+1 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben sind die Punkte  $A(-2|3|-2)$  und  $B(-6|-1|1)$ . Für welche Punkte  $P$  der  $x$ -Achse gilt  $\angle APB = 90^\circ$ ?

4. Gegeben ist die Gerade  $g$  durch die Punkte  $A(0|9|10)$  und  $B(9|9|19)$ . Wie gross ist der Abstand des Punktes  $P(3|2|1)$  von der Geraden  $g$ ?

5. Gegeben sind die Geraden  $g$  und  $h$ . Untersuchen und begründen Sie rechnerisch, ob sich die beiden Geraden schneiden. Falls ja, berechnen Sie den Schnittpunkt  $S$ .

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene

$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

auf.



**Übungsaufgaben zu den Kurzfragen**

---

7. Bestimmen Sie den Durchstosspunkt folgender Ebene  $E$  und Geraden  $g$ :

$$E : 2x - y + 3z = 0, \quad g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Gegeben sind die Punkte  $A(-2|1|1)$  und  $B(1|-3|-1)$ . Berechnen Sie den Durchstosspunkt der Geraden  $g = g(AB)$  und der Ebene  $E : 2x - 3y + 6z - 21 = 0$ .

9. Gegeben ist der Punkt  $P(2|-3|-1)$ . Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene  $E$  auf, die durch den Punkt  $P$  geht und zum Vektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  normal steht.

10. Gegeben ist der Punkt  $P(-6|10|16)$  und die Gerade

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die Koordinatengleichung der Normalebene  $N$  durch den Punkt  $P$  zur Geraden  $g$  auf.

## Stochastik

1. Eine Urne enthält rote und weisse Kugeln. Insgesamt befinden sich 40 Kugeln in der Urne. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen aus der Urne gezogen. Die Wahrscheinlichkeit dabei zwei weisse Kugeln zu ziehen, beträgt  $P(E) = \frac{9}{20}$ . Wie viele weisse Kugeln befinden sich in der Urne?